Distributietheorie 12-8-'02

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 - 2\frac{d}{dx} + 1$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \mathrm{dr}(T) \subset [0, +\infty)\}$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (Y de Heaviside één-stap functie). Aanwijzing: gebruik convolutie en/of symboolrekening.

3. Bepaal, met behulp van de Heaviside symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waar g een gegeven op $\mathbb{R}$ gedefinieerde continue functie is:

(1) $$Df = g,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$$

4. Wat is de oplossing f als $g = 1$?

5. Zij G een functie van de klasse C^2 on $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden op G bestaat er een continue functie f op $\mathbb{R}$ die voldoet aan de volgende convolutievergelijking? Bepaal in dat geval de oplossing f.

(2) $$\int_0^x f(x-y) y e^y dy = G(x) \qquad x \geq 0$$

II

1. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}$ zijn. Geef aan wanneer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen, en definieer in dat geval het convolutieproduct $S * T$.

2. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}$ zijn die aan de convolutievoorwaarde voldoen. Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ de volgende formule geldig is:

(3) $$e^{ax} S * e^{ax} T = e^{ax}(S * T)$$

3. Kun je dit generaliseren tot het geval van distributies op $\mathbb{R}^m$ met $m > 1$?

III

1. Geef de definitie van 'getemperde distributie', en van de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(T)$ van een getemperde distributie $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Geef de uitdrukking van $\mathcal{F}(xT)$ waar xT het product is van T met de functie $x \mapsto x$.

3. Bepaal de Fouriergetransformeerde S van de distributie $\mathrm{hw}\,\frac{1}{x}$. Verifieer dat S een functie is met modulus gelijk aan π. Aanwijzing: Gebruik de betrekking $x\,\mathrm{hw}\,\frac{1}{x} = 1$.

[1]De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk.